Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Maxwell.

Προβλήματα με Συμμετρία:

Η λύση των ολοκληρωτικών εξισώσεων του ΗΜ πεδίου είναι δύσκολη στη γενική περίπτωση, ακόμα και εάν δεν υπάρχει σύζευξη των πεδίων (στατική). Για αυτό στη γενική περίπτωση προτιμάμε να προσδιορίσουμε το πεδίο από τις διαφορικές εξισώσεις. Η ολοκληρωτική μορφή είναι όμως σημαντική γιατί δείχνει καλύτερα τη φυσική σημασία των εξισώσεων.

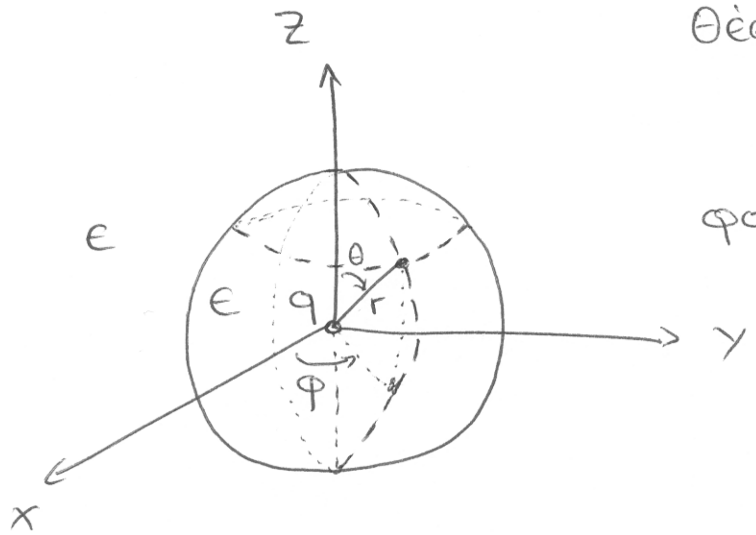
Στις ειδικές περιπτώσεις κατά τις οποίες το πεδίο παρουσιάζει συμμετρία, η αλγεβρική τιμή των κάθετων και των εφαπτομενικών συνιστωσών των πεδιακών εντάσεων παραμένει σταθερή σε επιφάνειες και γραμμές που προσδιορίζονται εύκολα από την υπάρχουσα συμμετρία. Τότε, η τιμή της κάθε συνιστώσας βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα για τη ροή ή την κυκλοφορία και η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση γίνεται αλγεβρική. Στις περιπτώσεις αυτές η εφαρμογή των ολοκληρωτικών εξισώσεων παρέχει τον απλούστερο τρόπο λύσης.

Για να επωφεληθούμε της συμμετρίας θα πρέπει βέβαια να χρησιμοποιήσουμε το κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Π.χ. όταν υπάρχει σφαιρική συμμετρία εργαζόμαστε, προφανώς, σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

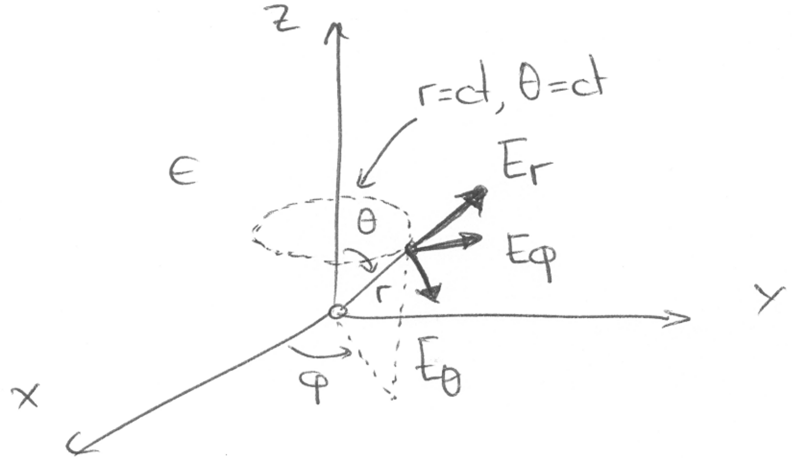
Παράδειγμα 1

× Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από ένα σημειακό φορτίο q σε χώρο με επιτρεπτότητα ε.

× Για να επωφεληθούμε της σφαιρικής συμμετρίας χρησιμοποιούμε ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων με την αρχή του στη θέση του σημειακού φορτίου.



Θεωρούμε μια σφαιρική επιφάνεια με κέντρο στην αρχή του ΣΣ (συστήματος συντεταγμένων) η οποία περνά από το σημείο όπου θέλουμε να υπολογίσουμε την ηλεκτρική πεδιακή ένταση, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Νόμος του Faraday:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

Για τον υπολογισμό της E_φ εφαρμόζουμε το νόμο του Faraday στον κυκλικό βρόχο r = σταθερό κ' θ = σταθερό. Παρατηρούμε ότι χάρη στη σφαιρική συμμετρία, η αλγεβρική τιμή E_φ θα είναι η ίδια σε όλα τα σημεία του βρόχου:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint E_\varphi \cdot dl = E_\varphi \oint dl = E_\varphi \cdot 2\pi r \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_\varphi = 0.$$

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζουμε τη συνιστώσα E_θ:

$$E_\theta = 0$$

Γενικά, σε ηλεκτροστατικά προβλήματα με σφαιρική συμμετρία οι εφαπτομενικές συνιστώσες E_θ και E_φ είναι μηδέν.

Για τον υπολογισμό της ακτινικής συνιστώσας E_r εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss για την ηλεκτρική ροή στη σφαιρική επιφάνεια $r =$ σταθερό. Χάρη στη σφαιρική συμμετρία η αλγεβρική τιμή E_r θα είναι ίδια σε όλα τα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας:

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint D_r \cdot dS = D_r \oint dS = \epsilon \cdot E_r (4\pi r^2) = q$$

Συνεπώς
$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

Αν τοποθετήσουμε ένα φορτίο Q στη θέση (r, θ, φ), όπου υπολογίσαμε την ηλεκτρική πεδιακή ένταση, θα βρούμε ότι η ηλεκτρική ~~πεδιακή~~ ~~ένταση~~ δύναμη στο Q είναι: $\vec{F} = Q\vec{E} = \dfrac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\hat{r}$. Έτσι ο νόμος του Coulomb βγήκε από τις εξισώσεις του Maxwell, δεν είναι ανεξάρτητος νόμος.

Παράδειγμα 2

Φορτίο q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας α τοποθετημένη στον αέρα. Να υπολογιστεί η ηλεκτρική πεδιακή ένταση.

Λύση:

Χάρη στη συμμετρία η ηλεκτρική πεδιακή ένταση θα έχει μόνο ακτινική συνιστώσα.
Η συνιστώσα αυτή όμως θα έχει διαφορετικές εκφράσεις μέσα $(r<\alpha)$ και έξω $(r>\alpha)$ από τη σφαίρα.

Για το εσωτερικό $(r<\alpha)$ ισχύει ότι:

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \Rightarrow (\epsilon_0 \cdot E_r)(4\pi r^2) = q_{\epsilon\sigma\omega\tau} = 0$$

ενώ για το εξωτερικό $(r>\alpha)$ έχουμε:

$$(\epsilon_0 \cdot E_r)(4\pi r^2) = q$$

Τελικά:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r<\alpha) \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & (r>\alpha) \end{cases}$$

Παράδειγμα 3

Ένα απλό μοντέλο για το άτομο του υδρογόνου είναι το εξής: στο κέντρο υπάρχει ένα πρωτόνιο με φορτίο $e = 1,6 \times 10^{-19}\, C$ και γύρω από αυτό βρίσκεται το ηλεκτρονικό νέφος με πυκνότητα $\rho_{el} = A \cdot \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, όπου A μια σταθερά και $a = 5,3 \times 10^{-11}\, m$ η ακτίνα του Bohr.

i/ Να προσδιοριστεί η σταθερά A στην έκφραση για την πυκνότητα

ii/ Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

Λύση:

i/ Το συνολικό φορτίο του ατόμου είναι μηδέν. Συνεπώς

$$\int_V \rho_{el} \cdot dV = q_{el} = -e .$$

Παίρνοντας υπόψη τη σφαιρική συμμετρία της πυκνότητας του ηλεκτρονικού νέφους έχουμε:

$$\int_V \rho_{el}\, dV = -e \Rightarrow \int A \cdot e^{-2r/a}\, 4\pi r^2 dr = -e$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\int x^2 e^{cx} dx = e^{cx}\left(\frac{x^2}{c} - \frac{2x}{c^2} + \frac{2}{c^3}\right)$$

Βρίσκουμε

$$A = -\frac{e}{4\pi\left[2\left(\frac{a}{2}\right)^3\right]} = \frac{-e}{\pi a^3} = -3,42 \times 10^{11}\, \frac{C}{m^3}$$

ii/ Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, η ηλεκτροστατική πεδιακή ένταση θα έχει μόνο ακτινική συνιστώσα. Η συνιστώσα αυτή βρίσκεται με εφαρμογή του νόμου του Gauss για την ηλεκτρική ροή σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r με κέντρο στη θέση του πρωτονίου:

$$\underbrace{\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}}_{\text{σφαιρική επιφάνεια}} = e + \underbrace{\int \rho_{el}\cdot dV}_{\text{εσωτερικό σφαίρας}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\epsilon_0 E_r)\, 4\pi r^2 = e + \int_0^r \left[-\frac{e}{\pi a^3}\cdot \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)\right](4\pi r^2\, dr)$$

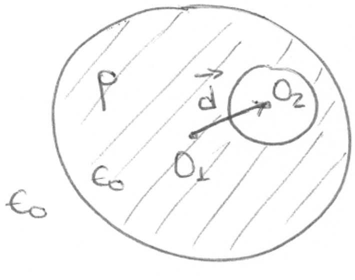
Άρα $$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1+\frac{2r}{a}+\frac{2r^2}{a^2}\right)\cdot \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)\cdot \hat{r}$$

Ο αριθμητής είναι το φορτίο που περιέχεται σε μία σφαίρα ακτίνας r. Παρατηρούμε ότι το φορτίο μηδενίζεται για $r \to \infty$, όπως περιμέναμε, αφού το συνολικό φορτίο σε ολόκληρο το χώρο είναι μηδέν:

$$\left(e + \underbrace{\int \rho_{el}\cdot dV}_{\text{εσωτερικό σφαίρας}} = e\left(1+\frac{2r}{a}+\frac{2r^2}{a^2}\right)\cdot \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \xrightarrow{\lim r\to\infty} 0\right)$$

Παράδειγμα 4

Ηλεκτρικό φορτίο είναι τοποθετημένο στον αέρα με ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα ρ μεταξύ δύο έκκεντρων σφαιρικών επιφανειών. Να βρεθεί η ηλεκτρική πεδιακή ένταση στη μικρή σφαιρική κοιλότητα, εάν το διάνυσμα από το κέντρο O_1 της μεγάλης σφαίρας στο κέντρο O_2 της μικρής σφαίρας είναι $\vec{d}$.



Λύση:

Στο παράδειγμα αυτό δεν υπάρχει σφαιρική συμμετρία. Μπορεί όμως να λυθεί με επαλληλία δύο κατανομών που η κάθε μία χωριστά παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία. Στο πρώτο πρόβλημα θεωρούμε ότι η μεγάλη σφαίρα έχει φορτίο με σταθερή χωρική πυκνότητα ρ, ενώ στο δεύτερο πρόβλημα υποθέτουμε ότι η μικρή σφαίρα έχει φορτίο με σταθερή χωρική πυκνότητα −ρ.

Από το νόμο του Gauss, η ακτινική πεδιακή ένταση στο εσωτερικό μιας σφαίρας με σταθερή χωρική πυκνότητα ρ είναι:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV \Rightarrow (\epsilon_0 E_r)(4\pi r^2) = \rho \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow E_r = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0}.$$

Ενώ λόγω συμμετρίας $E_\varphi = E_\theta = 0$.

Εφαρμόζουμε τον τύπο αυτό στις δύο σφαιρικές κατανομές που ορίσαμε παραπάνω, και βρίσκουμε για τα σημεία στο εσωτερικό της μικρής σφαίρας:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}_1 + \frac{(-\rho)}{3\epsilon_0}\vec{r}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

όπου $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ είναι τα ακτινικά διανύσματα από τα κέντρα O_1 και O_2 αντίστοιχα.

Αφού όμως είναι $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{d}$

στο εσωτερικό της μικρής σφαίρας έχουμε:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{d}$$

Παράδειγμα 5

Μια μονωμένη αγώγιμη σφαίρα ακτίνας α βρίσκεται στον αέρα και είναι φορτισμένη με φορτίο q. Να υπολογιστεί η ηλεκτρική πεδιακή ένταση στη μόνιμη κατάσταση.

Λύση:

Σε αυτό το παράδειγμα δεν αναφέρεται που και πώς είναι κατανεμημένο το φορτίο στην αγώγιμη σφαίρα. Εάν η αγωγιμότητα ενός αγωγού είναι άπειρη, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση στον τέλειο αυτό αγωγό είναι μηδενική, σύμφωνα με το νόμο του Ohm:

$$\vec{E} = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{\vec{J}}{\sigma} = 0$$

όπως ακριβώς η τάση σε ένα τέλειο βραχυκύκλωμα είναι πάντα μηδέν.

Εάν η αγωγιμότητα του αγωγού είναι πεπερασμένη, $\vec{E} = 0$ στη μόνιμη κατάσταση, εφόσον ο αγωγός δεν είναι συνδεδεμένος σε πηγές (όπως ακριβώς η συνεχής τάση είναι μηδενική σε ένα αντιστάτη που δεν είναι συνδεδεμένος σε πηγή). Αν $E \neq 0$, τότε $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ και θα υπήρχαν ωμικές απώλειες. Δεν είναι όμως δυνατόν να υπάρχουν ωμικές απώλειες σε μόνιμη κατάσταση χωρίς πηγές, επειδή δεν υπάρχει τρόπος να αναπληρώνεται η ηλεκτρική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα, και έτσι, το πεδίο εξασθενεί μέχρις ότου μηδενισθεί.

Αφού το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν, η ηλεκτρική ροή από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια μέσα στον αγωγό θα είναι μηδενική και, επομένως, δεν είναι δυνατόν να υπάρχει φορτίο στο εσωτερικό του αγωγού:

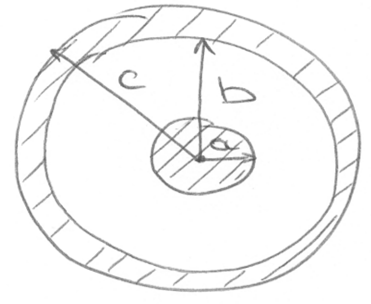
$$\rho = 0$$

Στη μόνιμη κατάσταση το φορτίο q θα κατανεμηθεί συμμετρικά στην επιφάνεια του αγωγού:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2}.$$

Παράδειγμα 6 (Σφαιρικός πυκνωτής)

Να υπολογιστεί η χωρητικότητα ενός σφαιρικού πυκνωτή με εσωτερική ακτίνα α, εξωτερική ακτίνα b και επιτρεπτότητα του διηλεκτρικού ϵ.



Λύση:

Από τον ορισμό της χωρητικότητας

$$C = \frac{q}{U}$$

Υποθέτουμε ότι η εσωτερική σφαίρα έχει φορτισθεί με φορτίο q και το εξωτερικό σφαιρικό κέλυφος με φορτίο $-q$. Πρέπει να βρούμε την τάση U μεταξύ των δύο αγωγών. Υπολογίζουμε πρώτα την ηλεκτρική πεδιακή ένταση. Όπως αναλύσαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, το πεδίο στο εσωτερικό των αγωγών είναι μηδέν. Το φορτίο q της εσωτερικής σφαίρας κατανέμεται ομοιόμορφα στη σφαιρική επιφάνεια $r=\alpha$. Στο διηλεκτρικό $(\alpha<r<b)$ έχουμε το ίδιο πεδίο με αυτό που βρέθηκε σε προηγούμενο παράδειγμα για το χώρο έξω από τη σφαιρική επιφάνεια $r=\alpha$:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\cdot\hat{r} \qquad \alpha<r<b$$

Η ηλεκτρική ροή από μία σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα μεταξύ b και c είναι μηδέν, διότι όλα τα σημεία της επιφάνειας αυτής βρίσκονται στο αγώγιμο σφαιρικό

κέλυφος που έχουν μηδενική πεδιακή ένταση.
Σύμφωνα με το νόμο του Gauss για την ηλεκτρική ροή, το συνολικό φορτίο στο εσωτερικό της επιφάνειας που χρησιμοποιούμε θα πρέπει να είναι μηδέν. Αφού στην επιφάνεια $r=a$ υπάρχει φορτίο q, στην επιφάνεια $r=b$ θα πρέπει να βρίσκεται φορτίο $-q$, δηλαδή το συνολικό φορτίο που έχει το εξωτερικό κέλυφος. Επομένως, στην επιφάνεια $r=c$, δε θα υπάρχει καθόλου φορτίο.

Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ότι όλες οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που ξεκινούν από το φορτίο q στην επιφάνεια $r=a$, πρέπει να καταλήξουν στο φορτίο της επιφάνειας $r=b$, διότι δε μπορούν να συνεχίσουν μέσα στο αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος όπου το πεδίο είναι μηδέν. Συνεπώς, το φορτίο στην επιφάνεια $r=b$ πρέπει να είναι $-q$ και δεν απομένει καθόλου φορτίο για την επιφάνεια $r=c$.

Τελικά έχουμε για την ηλεκτρική πεδιακή ένταση:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r<a \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} & a<r<b \\ 0 & b<r\leq c \\ 0 & r>c \end{cases}$$

Επομένως η τάση είναι

$$u = \int_a^b E_r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

κ' η χωρητικότητα:

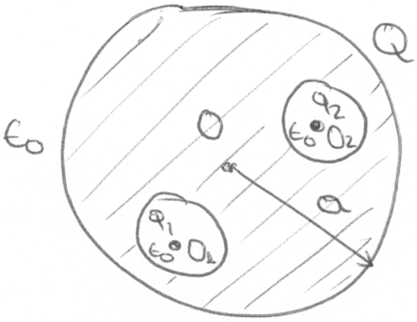
$$C = \frac{q}{u} = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a}$$

(Η χωρητικότητα μιας αγώγιμης σφαίρας ακτίνας a ως προς το άπειρο $(b \to \infty)$ είναι: $\left(\frac{1}{b} \to 0\right)$

$$C = 4\pi\epsilon a$$).

Παράδειγμα 7

Μια μονωμένη αγώγιμη σφαίρα ακτίνας a βρίσκεται στον αέρα με φορτίο Q. Στο εσωτερικό της σφαίρας υπάρχουν δύο σφαιρικές κοιλότητες με αέρα. Στο κέντρο O_1 της πρώτης σφαίρας και O_2 της δεύτερης σφαίρας υπάρχουν αντίστοιχα σημειακά φορτία q_1 και q_2. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο.



Λύση:

Στο αγώγιμο τμήμα της σφαίρας το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν.

Στην επιφάνεια της πρώτης κοιλότητας υπάρχει φορτίο $-q_1$, κ' στην επιφάνεια της δεύτερης $-q_2$. Στην εξωτερική επιφάνεια $r=a$ πρέπει να υπάρχει φορτίο $Q+q_1+q_2$, αφού το συνολικό φορτίο της μονωμένης αγώγιμης σφαίρας είναι Q.

Έτσι το αρχικό πρόβλημα μπορεί να αναλυθεί σε τρία προβλήματα που είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, αφού διαχωρίζονται από χώρο μηδενικού πεδίου.

Στην πρώτη κοιλότητα και για σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το O_1, βρίσκουμε εύκολα λόγω συμμετρίας κ' με εφαρμογή του νόμου του Gauss ότι ισχύει:

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \cdot \hat{r}_1$$

Ομοίως για τη δεύτερη κοιλότητα και για σφαιρικό Σ_2 με κέντρο το O_2, έχουμε:

$$\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\hat{r}_2$$

Στην εξωτερική σφαιρική επιφάνεια $r=\alpha$, το φορτίο $Q+q_1+q_2$ θα κατανεμηθεί συμμετρικά, διότι ο χώρος με το μηδενικό πεδίο δεν αφήνει τις εσωτερικές ασυμμετρίες να επηρεάσουν την κατανομή στην εξωτερική επιφάνεια. Ακόμα και αν τα φορτία q_1 και q_2 δεν ήταν στα κέντρα O_1 και O_2 των εσωτερικών κοιλοτήτων, ή ακόμα κι αν οι επιφάνειες των εσωτερικών κοιλοτήτων δεν ήταν συμμετρικές, όποτε η κατανομή των q_1 και q_2 στις επιφάνειες των κοιλοτήτων δε θα ήταν ομοιόμορφη και το πεδίο στις κοιλότητες δε θα ήταν συμμετρικό, η κατανομή του φορτίου $Q+q_1+q_2$ στην εξωτερική σφαιρική επιφάνεια $r=\alpha$ θα ήταν ομοιόμορφη.

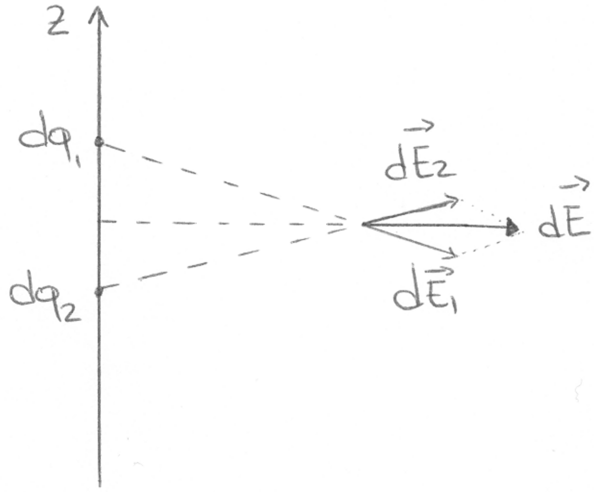
Συνεπώς, το εξωτερικό πεδίο στο Σ με αρχή στο κέντρο O της αγώγιμης σφαίρας είναι:

$$\vec{E} = \frac{Q+q_1+q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad (r>\alpha)$$

Παράδειγμα 8

Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε φορτίο τοποθετημένο στον αέρα με σταθερή γραμμική πυκνότητα λ κατά μήκος μιας απέραντης γραμμής.

Λύση:



Θα χρησιμοποιήσουμε ένα κυλινδρικό ΣΣ με τον άξονα z κατά μήκος του γραμμικού φορτίου, για να επωφεληθούμε της κυλινδρικής συμμετρίας.

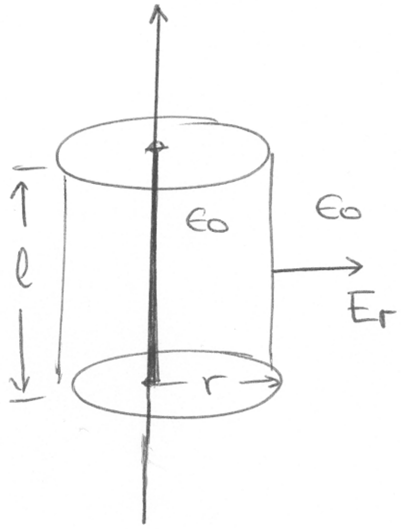
Μπορούμε εφαρμόζοντας δύο φορές το νόμο του Faraday, να αποδείξουμε ότι $E_\varphi = E_z = 0$ στα ηλεκτροστατικά προβλήματα στα οποία οι πηγές είναι ανεξάρτητες του φ (δηλ. έχουν κυλινδρική συμμετρία) και του z (δηλ. εκτείνονται ομοιόμορφα από $z=-\infty$ μέχρι $z=+\infty$).

Μπορούμε να το αποδείξουμε εδώ και με διαφορετικό τρόπο: Παίρνουμε δύο απειροστά φορτία dq_1 και dq_2 που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς την προβολή του σημείου όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο. Επαλληλία των εντάσεων $\vec{dE_1}$ και $\vec{dE_2}$ που οφείλονται στα δύο φορτία, δίνει την απειροστή πεδιακή ένταση $\vec{dE}$ με ακτινική μόνο διεύθυνση. Αφού η γραμμή έχει απέραντο μήκος, για κάθε φορτίο dq_1 θα υπάρχει πάντα το συμμετρικό του dq_2. Συνεπώς, η συνολική πεδιακή ένταση θα έχει μόνο ακτινική διεύθυνση, δηλ.:

$$E_\varphi = E_z = 0 .$$

Το φορτίο λ έχει κυλινδρική συμμετρία και εκτείνεται από $z=-\infty$ μέχρι $z=+\infty$. Επομένως, η E_r θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από τον άξονα, δηλαδή θα είναι σταθερή σε όλα τα σημεία μιας κυκλικής κυλινδρικής επιφάνειας με τον άξονά της κατά μήκος του γραμμικού φορτίου.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss για την ηλεκτρική ροή στην κλειστή επιφάνεια του κυλίνδρου που φαίνεται στο σχήμα:



$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_{εσωτερικό}$$

όπου:

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int D_z\, dS}_{\text{πάνω βάση}} + \underbrace{\int (-D_z)\, dS}_{\text{κάτω βάση}} + \underbrace{\int D_r\, dS}_{\text{παράπλευρη επιφάνεια}} = 0 + 0 + D_r \underbrace{\int dS}_{\text{παράπλευρη επιφάνεια}} =$$

$$= (\varepsilon_0 \cdot E_r)(2\pi r l)$$

και: $$q_{εσωτερικό} = \int \lambda \cdot dl = \lambda \int dl = \lambda \cdot l$$

Συνεπώς: $$(\varepsilon_0 E_r)(2\pi r l) = \lambda \cdot l$$

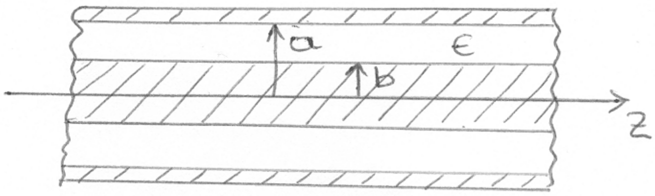
και $$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{r}\,.$$

Παράδειγμα 9 (κυλινδρικός πυκνωτής)

Να βρεθεί η χωρητικότητα στη μονάδα μήκους ενός ομοαξονικού καλωδίου με εξωτερική ακτίνα a, εσωτερική ακτίνα b, απέραντο μήκος και επιτρεπτότητα διηλεκτρικού ϵ.

Λύση:

Εξετάζουμε ένα μήκος l από το απέραντο καλώδιο. Ας υποθέσουμε ότι το φορτίο στον εσωτερικό αγωγό για μήκος l είναι q και το φορτίο στο αντίστοιχο μήκος του εξωτερικού αγωγού είναι $-q$.



Όπως εξηγήσαμε σε προηγούμενα παραδείγματα, το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στους αγωγούς είναι μηδέν.

Το φορτίο του εσωτερικού αγωγού κατανέμεται ομοιόμορφα στην κυλινδρική επιφάνεια $r=b$. Επομένως, η επιφανειακή πυκνότητα είναι:

$$\sigma_b = \frac{q}{2\pi b \cdot l}$$

Δηλ. το φορτίο στη μονάδα μήκους του εσωτερικού αγωγού είναι:

$$\lambda = \frac{q}{l} = \sigma_b \cdot 2\pi b$$

Ο εξωτερικός αγωγός έχει το φορτίο του ομοιόμορφα διανεμημένο στην κυλινδρική επιφάνεια $r=a$ με επιφανειακή πυκνότητα:

$$\sigma_a = \frac{-q}{2\pi a l}$$

το φορτίο στη μονάδα μήκους του εσωτερικού αγωγού θα είναι:

$$-\lambda = \frac{-q}{l} = \sigma_a 2\pi a .$$

Η ηλεκτρική πεδιακή ένταση στο διηλεκτρικό υπολογίζεται με εφαρμογή του νόμου Gauss για την ηλεκτρική ροή σε κυλινδρική επιφάνεια με τον άξονά της κατά μήκος του άξονα z κ' ακτίνα r, $b < r < a$ (όπως στο προηγούμενο παράδειγμα):

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} \cdot \hat{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon l \cdot r} \hat{r} \qquad (b < r < a)$$

Για να βρούμε τη χωρητικότητα μας χρειάζεται η τάση μεταξύ των δύο αγωγών:

$$u = \int_b^a E_r \cdot dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{a}{b} = \frac{q}{2\pi\varepsilon l} \ln\frac{a}{b}$$

Συνεπώς, η χωρητικότητα C που έχει ένα τμήμα του καλωδίου με μήκος l είναι:

$$C = \frac{q}{u} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{a}{b}}$$

και η χωρητικότητα C_μ ανά μονάδα μήκους θα είναι:

$$C_\mu = \frac{\lambda}{u} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{a}{b}} .$$

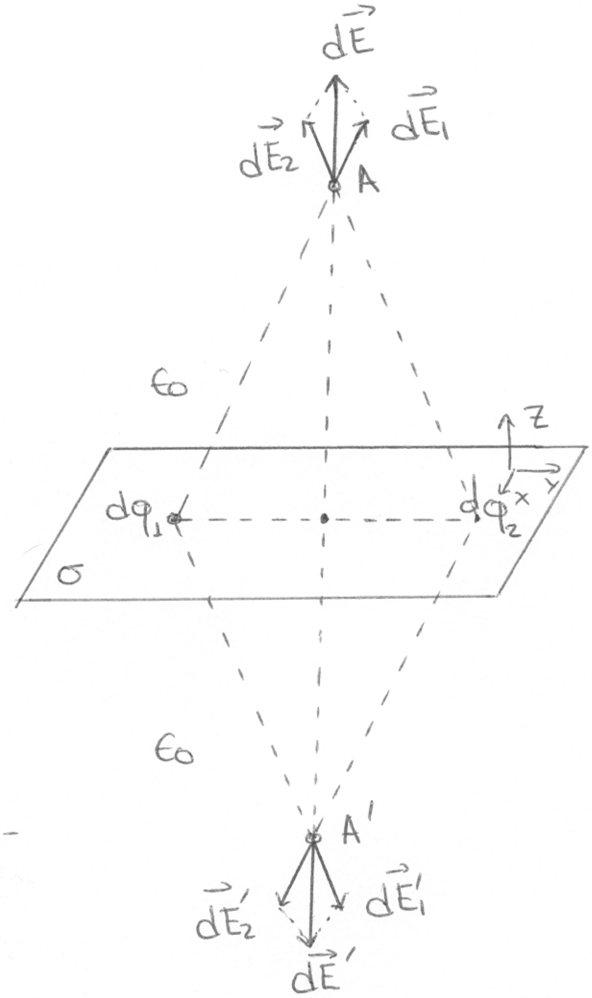
Παράδειγμα 10

Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο στον αέρα που προκαλείται από ομοιόμορφη κατανομή φορτίου σε μια απέραντη επίπεδη επιφάνεια με επιφανειακή πυκνότητα σ.

Λύση:

Υποθέτουμε ότι το φορτίο βρίσκεται στο επίπεδο $z=0$.

Θεωρούμε δύο απειροστά φορτία dq_1 και dq_2, συμμετρικά ως προς την προβολή του σημείου Α, όπου υπολογίζουμε το πεδίο. Από την επαλληλία των εντάσεων $\vec{dE_1}$ κ' $\vec{dE_2}$ βρίσκουμε ότι η ένταση $\vec{dE}$ θα είναι κάθετη στο επίπεδο με το φορτίο, (δηλ. // άξονα z). Επειδή η επιφάνεια έχει άπειρη έκταση, για κάθε dq_1, θα υπάρχει πάντα το συμμετρικό του dq_2. Έτσι η συνολική πεδιακή ένταση θα έχει μόνο z συνιστώσα.

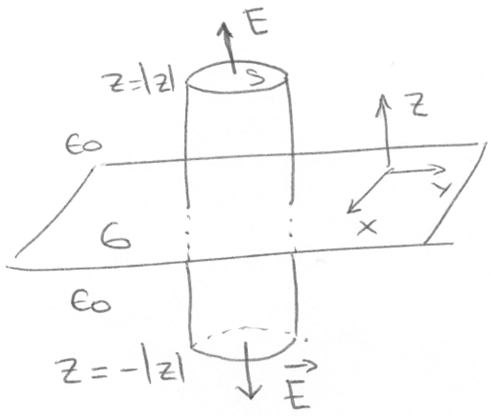


Η συνιστώσα αυτή θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το επίπεδο του φορτίου, αφού το επίπεδο αυτό εκτείνεται μέχρι το άπειρο: $\vec{E} = E_z(z)\cdot\hat{z}$.

Στο σημείο Α', που είναι συμμετρικό του Α ως προς το επίπεδο του φορτίου $(z'_A = -z_A)$, η πεδιακή ένταση

Θα έχει το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετη φορά από ότι βρέθηκε στο A: $E_z(-z) = -E_z(z)$.

Για να υπολογίσουμε την E_z εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss για την ηλεκτρική ροή σε μία κυλινδρική επιφάνεια με άξονα κάθετο στο επίπεδο $z=0$ του φορτίου και με βάσεις τοποθετημένες συμμετρικά ως προς το επίπεδο αυτό:



$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_{εσωτ}$$

όπου

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int D_z\cdot dS}_{\text{πάνω βάση}} + \underbrace{\int (-D_z)\, dS}_{\text{κάτω βάση}} +$$

$$+ \underbrace{\int D_n\, dS}_{\text{παράπλευρη επιφάνεια}} = D_z(z)\cdot\int dS - D_z(-z)\int dS + 0 = 2\epsilon_0 E_z(z)\cdot S$$

και $q_{εσωτ} = \int σ\cdot dS = σ\cdot\int dS = σ\cdot S$

Επομένως (για $z>0$): $2\epsilon_0\cdot E_z(z)\cdot S = σ\cdot S \Rightarrow E_z(z) = \dfrac{σ}{2\epsilon_0}$.

Τελικά:

$$\vec{E} = \frac{σ}{2\epsilon_0}\cdot \mathrm{sign}(z)\cdot\hat{z} = \begin{cases} \dfrac{σ}{2\epsilon_0}\cdot\hat{z} & (z>0) \\[2ex] -\dfrac{σ}{2\epsilon_0}\cdot\hat{z} & (z<0) \end{cases}$$

Γενικότερα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όταν το φορτίο είναι κατανεμημένο σε στρώματα κάθετα στη διεύθυνση z και άπειρης έκτασης στις διευθύνσεις x και y με χωρική πυκνότητα $\rho(z)$, που εξαρτάται μόνο από τη διεύθυνση z (ή με σταθερή πυκνότητα ρ ανεξάρτητη και της διεύθυνσης z) η ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\vec{E}$, θα έχει μόνο z συνιστώσα και θα εξαρτάται μόνο από τη συντεταγμένη z.

Ακόμα, αν υπάρχει ένα επίπεδο συμμετρίας στην παραπάνω κατανομή, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση θα είναι αντισυμμετρική σχετικά με το επίπεδο συμμετρίας. ($E(-z) = -E(z)$ για επίπεδο συμμετρίας το $z=0$).

Παράδειγμα 11

Ηλεκτρικό φορτίο είναι τοποθετημένο στον αέρα σε χώρο απέραντης έκτασης στις διευθύνσεις x και y από $z=0$ μέχρι $z=h$ με χωρική πυκνότητα:

$$\rho = \rho_0\left[1-\left(\frac{2z-h}{h}\right)^2\right]$$

Να βρεθεί το ηλεκτρικό ~~φορτίο~~ πεδίο.

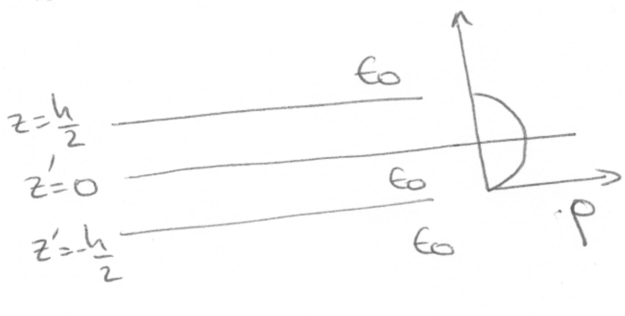
Λύση:

Η κατανομή του φορτίου έχει επίπεδο συμμετρίας το $z=\frac{h}{2}$. Με την αλλαγή:

$$z' = z - \frac{h}{2}$$

η συντεταγμένη του επιπέδου συμμετρίας γίνεται $z'=0$.
Η έκφραση για τη χωρική πυκνότητα στο νέο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\rho = \rho_0\left[1-\left(\frac{2z'}{h}\right)^2\right] \quad -\frac{h}{2}<z'<\frac{h}{2}.$$



Σύμφωνα με αυτά που είπαμε για συμμετρικές κατανομές, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση έχει μόνο μία συνιστώσα, την $E_{z'}$. Η $E_{z'}$ εξαρτάται μόνο από τη συντεταγμένη z' και είναι αντισυμμετρική ως προς το επίπεδο συμμετρίας

$$E_{z'}(-z') = -E_{z'}(z').$$

Η σχέση αυτή για $z'=0$ δίνει: $E_{z'}(0)=0$.

Για τον υπολογισμό της συνιστώσας $E_{z'}$, εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss για την ηλεκτρική ροή σε ένα κύλινδρο με άξονα στη διεύθυνση z', κάτω βάση στο επίπεδο $z'=0$ και πάνω βάση στο επίπεδο z'.

Για $0 \leq z' \leq \frac{h}{2}$ έχουμε: $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho \cdot dV$

$$(\epsilon_0 E_{z'}) \cdot S = \int_0^{z'} \rho \cdot (S dz') = \rho_0 \cdot z' \left(1 - \frac{4}{3} \frac{z'^2}{h^2}\right) \cdot S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{z'} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot z' \left(1 - \frac{4}{3} \frac{z'^2}{h^2}\right).$$

Η ίδια σχέση ισχύει και για $-\frac{h}{2} \leq z' \leq 0$:

$$E_{z'} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} |z'| \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \frac{|z'|^2}{h^2}\right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot z' \left(1 - \frac{4}{3} \frac{z'^2}{h^2}\right)$$

Για $z' \geq h/2$ έχουμε:

$$(\epsilon_0 \cdot E_{z'}) \cdot S = \int_0^{h/2} \rho \, (dz' \cdot S) = \rho_0 \frac{h}{3} \cdot S \Rightarrow E_{z'} = \frac{\rho_0 \cdot h}{3\epsilon_0}$$

και για $z' \leq h/2$: $E_{z'} = -\frac{\rho_0 \cdot h}{3\epsilon_0}$.

Η ηλεκτρική πεδιακή ένταση στο αρχικό ΣΣ είναι:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 \cdot h}{3\epsilon_0} \hat{z}, & z \geq h \\ \dfrac{\rho_0}{6\epsilon_0} (2z-h) \cdot \left[3 - \left(\dfrac{2z-h}{h}\right)^2\right] \hat{z}, & 0 \leq z \leq h \\ -\dfrac{\rho_0 h}{3\epsilon_0} \cdot \hat{z} & z \leq 0. \end{cases}$$